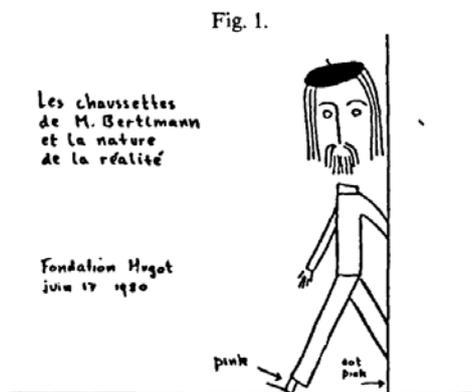


# I calzini di Bertlmann e la natura della realtà

## 1. Introduzione

Il filosofo della strada, che non ha seguito un corso di meccanica quantistica, non è per niente impressionato dalle correlazioni Einstein-Podolsky-Rosen. Può indicare molti esempi di correlazioni simili nella vita di tutti i giorni.<sup>1</sup>



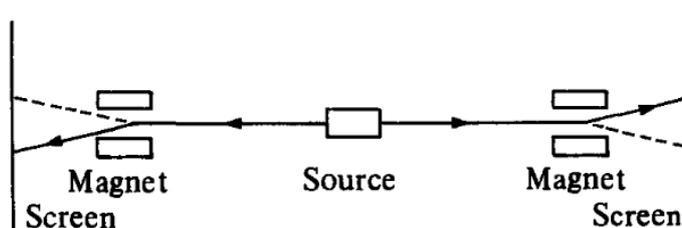
Viene spesso citato il caso dei calzini di Bertlmann. Al dottor Bertlmann piace indossare due calzini di colori diversi. Quale colore avrà su un dato piede in un dato giorno è abbastanza imprevedibile. Ma quando vedi che il primo calzino è rosa puoi già essere sicuro che il secondo calzino non sarà rosa.

L'osservazione del primo e l'esperienza di Bertlmann forniscono informazioni immediate sul secondo. Non c'è modo di spiegare i gusti, ma a parte questo non c'è alcun mistero. E la questione posta da EPR non è la stessa?

Si consideri ad esempio il particolare esperimento mentale

EPR di Bohm<sup>2</sup>

Due particelle adatte, opportunamente preparate (nello stato di spin singoletto), vengono dirette da una sorgente comune verso due magneti separati da una notevole distanza seguiti da schermi di rilevamento.



Ogni volta che l'esperimento viene eseguito, ciascuna delle due particelle viene deviata verso l'alto o verso il basso dal il magnete corrispondente. Che una delle due particelle salga o scenda in un dato contesto è del tutto imprevedibile.

Ma quando una particella sale l'altra scende sempre e viceversa.

Dopo un po' di volte basta guardare un lato per sapere anche dell'altro.

E allora? Non deduciamo semplicemente che le particelle hanno qualche tipo di proprietà che viene rivelata dai magneti, e che è stata scelta alla Bertlmann dalla sorgente?

È possibile vedere questa semplice faccenda come qualcosa di oscuro e misterioso? Non ci resta che fare l'esperimento.

A tal fine è utile sapere come i fisici tendono a rappresentare intuitivamente le particelle con "spin", perché è di tali particelle che ci occupiamo.

In una rozza immagine classica si prevede che sia un moto interno alla particella a produrre un momento angolare attorno a un asse e che, allo stesso tempo, tale moto generi una magnetizzazione lungo quell'asse.

<sup>1</sup> A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, Phys. Rev. 46, 777, (1935). For an introduction see the accompanying paper of F. Laloe.

<sup>2</sup> D. Bohm, Quantum Theory. Englewood Cliffe, New Jersey (1951).

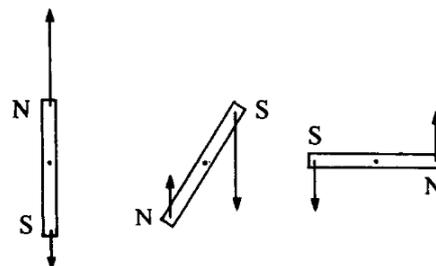
La particella viene quindi vista come un piccolo magnete rotante con i poli nord e sud che giacciono sull'asse di rotazione.

Quando viene applicato un campo magnetico a un magnete, il polo nord viene tirato in una direzione e il polo sud viene tirato nell'altra.

Se il campo è uniforme, la forza risultante sul magnete è zero. Ma in un campo non uniforme un polo viene tirato più dell'altro e il magnete nel suo insieme viene tirato nella direzione corrispondente.

Il nostro esperimento coinvolge tali campi non uniformi - creati dai magneti detti di "Stern-Gerlach".

Supponiamo che il campo magnetico punti verso l'alto e che la forza del campo aumenti nella direzione verso l'alto. Quindi una particella con asse sud-nord che punta verso l'alto verrebbe tirata verso l'alto. Mentre una con asse che punta verso il basso verrebbe tirata verso il basso.



Una con asse perpendicolare al campo attraverserebbe il campo senza deviazione. E una orientata a un angolo intermedio verrebbe deviata a un grado intermedio (tutto

ciò vale per una particella di carica elettrica zero perché quando una particella carica si muove in un campo magnetico c'è una forza aggiuntiva che complica la situazione).

Supponiamo dunque che una particella di una data specie abbia una certa magnetizzazione. Ma a causa dell'angolo variabile tra asse della particella e campo ci sarebbe ancora una gamma di deviazioni possibili in un magnete alla Stern-Gerlach.



Ci si potrebbe aspettare quindi che una serie di particelle crei un modello simile a quello della figura di sinistra su uno schermo di rilevamento. Ma ciò che si osserva nel caso più semplice è invece simile a quello che vediamo nella figura di destra con due distinti gruppi di particelle deviate (verso l'alto o verso il basso) invece che una banda praticamente continua.

(Questo caso più semplice, con solo due gruppi di deviazioni, è quello delle cosiddette particelle "spin- $\frac{1}{2}$ "; per le particelle "spin- $j$ " ci sono invece  $(2j+1)$  gruppi.

Il risultato della figura di destra è molto difficile da comprendere se si usa la rappresentazione classica-ingenua. Si potrebbe supporre, ad esempio, che il campo magnetico attragga prima i piccoli magneti in allineamento con se stesso, come gli aghi della bussola. Ma anche se questo fosse dinamicamente valido, spiegherebbe solo un gruppo di deviazioni. Per spiegare il secondo gruppo sarebbero necessari "aghi della bussola" che puntano nella direzione sbagliata. E comunque non sarebbe dinamicamente valido. Il momento angolare interno, tramite un movimento giroscopico, dovrebbe stabilizzare l'angolo tra l'asse della particella e il campo magnetico.

Bene, allora, non potrebbe essere che la sorgente per qualche motivo fornisca particelle con assi che puntano solo in una direzione o nell'altra e non in mezzo? Ma questo è facilmente testabile ruotando il magnete Stern-Gerlach.



Ciò che otteniamo è esattamente lo stesso schema di divisione di prima, ma ruotato come il magnete.

Per spiegare l'assenza di deviazioni intermedie dovremmo immaginare che la sorgente anticipi in qualche modo l'orientamento del magnete Stern-Gerlach.



Fenomeni di questo tipo <sup>3</sup> hanno fatto sì che i fisici disperassero di poter trovare qualsiasi immagine spazio-temporale coerente con ciò che accade su scala atomica e subatomica.

Facendo di necessità virtù, e influenzati da filosofie positiviste e strumentaliste <sup>4</sup>, molti sono arrivati a sostenere non solo che è difficile trovare un'immagine coerente, ma che è sbagliato cercarne una, *se non immorale, certamente poco professionale*.

Andando ancora oltre, alcuni hanno affermato che le particelle atomiche e subatomiche non hanno alcuna proprietà definita prima dell'osservazione. Non c'è niente, cioè, nelle particelle che si avvicinano al magnete, che distingue quelle che vengono successivamente deviate verso l'alto da quelle che vengono successivamente deviate verso il basso. In effetti, persino le particelle non sono realmente lì.

Ad esempio <sup>5</sup>, Bohr una volta dichiarò quando gli fu chiesto se l'algoritmo della meccanica quantistica potesse essere considerato in qualche modo lo specchio di una realtà quantistica sottostante: *"Non esiste un mondo quantistico. Esiste solo una descrizione astratta della meccanica quantistica. È sbagliato pensare che il compito della fisica sia scoprire come è la Natura. La fisica riguarda ciò che possiamo dire della Natura"*.

E per Heisenberg <sup>6</sup> *'... negli esperimenti sugli eventi atomici abbiamo a che fare con cose e fatti, con fenomeni che sono tanto reali quanto qualsiasi fenomeno nella vita quotidiana. Ma gli atomi o le particelle elementari non sono altrettanto reali; formano un mondo di potenzialità o possibilità piuttosto che uno di cose o fatti'*.

Jordan <sup>7</sup> ha dichiarato, con enfasi, che le osservazioni non solo disturbano ciò che deve essere misurato, ma lo producono. In una misurazione della posizione, ad esempio, come quella eseguita con il microscopio a raggi gamma, *l'elettrone è costretto a una decisione. Lo costringiamo ad assumere una posizione definita; in precedenza non era, in generale, né qui né là; non aveva ancora preso la sua decisione per una posizione definita... Se con un altro esperimento si misura la velocità dell'elettrone, questo significa che l'elettrone è costretto a decidere se stesso per un valore esattamente definito della velocità... noi stessi produciamo i risultati della misura*.

È nel contesto di idee come queste che si deve immaginare la discussione delle correlazioni Einstein-Podolsky-Rosen. Allora è un po' meno incomprensibile che il documento EPR abbia causato tanto clamore e che la polvere non si sia ancora depositata.

È come se fossimo arrivati a negare la realtà dei calzini di Bertlmann, o almeno dei loro colori, quando non li guardavamo. E come se un bambino si fosse chiesto: *come mai scelgono sempre colori diversi quando li si guarda? Come fa il secondo calzino a sapere cosa ha fatto il primo?*

Un paradosso davvero! Ma per gli altri, non per EPR. EPR non ha usato la parola "paradosso". Erano dalla parte del punto di vista dell'uomo della strada. Per loro queste correlazioni hanno semplicemente dimostrato che i teorici quantistici erano stati frettolosi nel respingere la realtà del mondo microscopico.

---

<sup>3</sup> Note, however, that these particular phenomena were actually inferred from other quantum phenomena in advance of observation.

<sup>4</sup> And perhaps romanticism. See P. Forman, Weimar culture, causality and quantum theory, 1918-1927, in Historical Studies in the Physical Sciences, vol.3, 1-115. R. McCormach, ed. University of Pennsylvania Press, Philadelphia A971).

<sup>5</sup> M. Jammer, The Philosophy of Quantum Mechanics, John Wiley A974), p. 204, quoting A. Petersen, Bulletin of the Atomic Scientist 19, 12 A963).

<sup>6</sup> M. Jammer, ibid, p. 205, quoting W. Heisenberg, Physics and Philosophy, p. 160.' Allen and Unwin, London A958).

<sup>7</sup> M. Jammer, ibid, p. 161, quoting E. Zilsel, P. Jordans Versuch, den Vitalismus quanten mechanisch zu retten, Erkenntnis 5, A935) 56-64.

In particolare, Jordan aveva sbagliato a supporre che nulla fosse reale o fisso in quel mondo prima dell'osservazione. Dopo aver osservato una sola particella, il risultato dell'osservazione successiva dell'altra (probabilmente in un luogo molto remoto) è immediatamente prevedibile. Potrebbe essere che la prima osservazione in qualche modo fissi ciò che non era fisso o renda reale ciò che era irreali, non solo per la particella vicina, ma anche per quella lontana?

Per EPR questa sarebbe un'impensabile *azione a distanza dovuta a fantasmi*<sup>8</sup>. Per evitare tale azione a distanza, occorre attribuire alle regioni spazio-temporali in questione proprietà reali prima dell'osservazione, proprietà correlate, che predeterminano i risultati di queste particolari osservazioni.

Poiché queste proprietà reali, fissate prima dell'osservazione, non sono contenute nel formalismo quantistico<sup>9</sup>, quel formalismo per EPR è incompleto. Può anche essere corretto su certi aspetti, ma il formalismo quantistico non può rappresentare la realtà completa.

È importante notare che il determinismo, pur nella misura limitata in cui viene utilizzato nell'argomentazione di EPR, non è assunto ma dedotto. Ciò che è ritenuto sacro è il principio di *causalità locale* o *nessuna azione a distanza*.

Naturalmente, la mera correlazione tra eventi distanti non implica di per sé azione a distanza, ma solo correlazione tra i segnali che raggiungono i due luoghi. Questi segnali, nell'esempio idealizzato di Bohm, devono essere sufficienti a determinare se le particelle salgono o scendono. Perché qualsiasi residuo indeterminismo potrebbe solo rovinare la correlazione perfetta.

È piuttosto difficile far passare l'idea che il determinismo non è un presupposto dell'analisi. C'è una convinzione diffusa ed erronea che per Einstein<sup>10</sup> il determinismo sia sempre stato un principio sacro. La continua citazione del suo celebre "*Dio non gioca a dadi*" non ha aiutato in questo senso. Tra coloro che hanno avuto grandi difficoltà a comprendere la posizione di Einstein c'era Born. Pauli ha cercato di aiutarlo<sup>11</sup> in una lettera del 1954:

*... Non sono riuscito a riconoscere Einstein ogni volta che hai parlato di lui nella tua lettera o nel tuo manoscritto. Mi è sembrato come se avessi eretto un Einstein fittizio per te stesso, che poi hai abbattuto con grande pompa. In particolare Einstein non considera il concetto di "determinismo" così fondamentale come spesso si ritiene (come mi ha detto enfaticamente molte volte)... lui contesta, come criterio per l'ammissibilità di una teoria, l'utilizzo della domanda: "È rigorosamente deterministica?" ... non era affatto infastidito da te, ma ha solo detto che eri una persona che non ascolta.*

Born aveva particolari difficoltà con l'argomento Einstein-Podolsky-Rosen. Ecco il suo riassunto, molto tempo dopo, quando ha curato la corrispondenza Born-Einstein<sup>12</sup>.

*La radice della differenza tra Einstein e me era l'assioma che gli eventi che accadono in luoghi diversi A e B siano indipendenti l'uno dall'altro, nel senso che un'osservazione sullo stato delle cose in B non può insegnarci nulla sullo stato delle cose in A.*

L'incomprensione non potrebbe essere più completa. Einstein non aveva difficoltà ad accettare che le cose in luoghi diversi potessero essere correlate. Quello che non riusciva ad accettare era che un intervento in un posto potesse influenzare, immediatamente, le cose nell'altro.

---

<sup>8</sup> The phrase is from a 1947 letter of Einstein to Born, Ref. 11, p. 158.

<sup>9</sup> The accompanying paper of F. Laloe gives an introduction to quantum formalism.

<sup>10</sup> And his followers. My own first paper on this subject (Physics 1, 195 A965.) starts with a summary of the EPR argument from locality to deterministic hidden variables. But the commentators have almost universally reported that it begins with deterministic hidden variables.

<sup>11</sup> M. Born (editor), The Born-Einstein-Letters, p. 221. (Macmillan, London A971).

<sup>12</sup> M. Born, *ibid*, p. 176.

Questi riferimenti a Born non intendono sminuire una delle figure imponente della fisica moderna. Intendono illustrare la difficoltà nel mettere da parte i preconcetti e ascoltare ciò che viene effettivamente detto. Intendono incoraggiarti, caro ascoltatore, ad ascoltare un po' di più.

Ecco, infine, un riassunto dello stesso Einstein<sup>13</sup>:

Indipendentemente dalla meccanica quantistica, se ci si chiede cosa, sia caratteristico delle idee di fondo della fisica, si è subito colpiti da quanto segue: i concetti della fisica si riferiscono a un mondo esterno reale ... È inoltre caratteristico di questi oggetti fisici che siano pensati come disposti in un continuum spazio-temporale.

Un aspetto essenziale di questa disposizione delle cose in fisica è che tali oggetti rivendicano, in un dato istante, un'esistenza indipendente l'uno dall'altro, a condizione che essi 'siano situati in parti diverse dello spazio'.

La seguente idea caratterizza l'indipendenza relativa di oggetti distanti nello spazio (A e B): una influenza esterna su A non ha alcuna influenza diretta su B...

Mi sembra che non ci siano dubbi che quei fisici che considerano i metodi descrittivi della meccanica quantistica in linea di principio come definitivi reagirebbero a questa linea di pensiero nel modo seguente: abbandonerebbero il requisito... sulla esistenza indipendente della realtà fisica presente in regioni diverse dello spazio; essi sarebbero giustificati nel sottolineare che la teoria quantistica non fa mai un uso esplicito di questo requisito.

Lo ammetto, ma vorrei sottolineare che quando considero i fenomeni fisici a me noti, e in particolare quelli che sono stati compresi con successo dalla meccanica quantistica, non riesco ancora a trovare alcun fatto da nessuna parte che faccia apparire probabile che (quel) requisito debba essere abbandonato.

Sono quindi propenso a credere che la descrizione della meccanica quantistica... debba essere considerata una descrizione incompleta e indiretta della realtà, da sostituire in un secondo momento con una più completa e diretta..

## 2. Illustrazione

Illustriamo la possibilità di ciò che Einstein aveva in mente nel contesto delle particolari previsioni di meccanica quantistica già citate per l'esperimento mentale EPRB.

Queste previsioni rendono difficile credere nella completezza del formalismo quantistico. Ma naturalmente al di fuori di quel formalismo non creano alcuna difficoltà per la nozione di causalità locale. Per mostrarlo esplicitamente, esibiamo una banale immagine spazio-temporale ad hoc di ciò che potrebbe accadere. Si tratta di una modifica dell'ingenua immagine classica già descritta.

Certamente qualcosa deve essere modificato, per riprodurre i fenomeni quantistici. In precedenza, abbiamo implicitamente assunto per la forza netta nella direzione del gradiente di campo (che consideriamo sempre nella stessa direzione del campo) una forma:

$$F \cos\theta \quad (1)$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra il campo magnetico (e il gradiente del campo) e l'asse delle particelle.

La cambiamo in:

$$F \frac{\cos\theta}{|\cos\theta|} \quad (2)$$

---

<sup>13</sup> A. Einstein, *Dialectica*, 320, A948). Included in a letter to Born, Ref. 11. p. 168.

Mentre in precedenza la forza variava su un intervallo continuo al variare di  $\theta$ , ora assume solo due valori,  $\pm F$ , il cui segno è determinato dal fatto che l'asse magnetico della particella punti più vicino alla direzione del campo o nella direzione opposta.

Non viene fatto alcun tentativo di spiegare questo cambiamento nella legge della forza. È solo un *tentativo ad hoc* di spiegare i fatti sperimentali. E naturalmente spiega immediatamente la comparsa di soli due gruppi di particelle, deviate o nella direzione del campo magnetico o nella direzione opposta.

Per spiegare quindi le correlazioni di Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm dobbiamo solo supporre che le due particelle emesse dalla sorgente abbiano assi magnetici diretti in modo opposto. Quindi se l'asse magnetico di una particella è più orientato lungo (che contro) un campo di Stern-Gerlach, gli assi magnetici dell'altra particella saranno più prossimi contro (che lungo) un campo di Stern-Gerlach parallelo.

Quindi quando una particella viene deviata verso l'alto, l'altra viene deviata verso il basso, e viceversa. Non c'è nulla di problematico o sconcertante in queste correlazioni, con analizzatori di Stern-Gerlach paralleli tra loro, dal punto di vista einsteiniano. Fin qui tutto bene.

Ma ora andiamo un po' oltre rispetto a prima e consideriamo il caso di magneti di Stern-Gerlach non paralleli. Lasciamo che il primo venga ruotato lontano da una posizione standard, attorno alla linea di volo della particella, di un angolo  $\alpha$ . Lasciamo che il secondo venga ruotato allo stesso modo di un angolo  $\beta$ .

Quindi ora se l'asse magnetico di ciascuna particella separatamente preso è orientato in modo casuale, ma se gli assi delle particelle di una data coppia sono sempre orientati in modo opposto, un breve calcolo fornisce per le probabilità dei vari possibili risultati, nel modello ad hoc,

$$\begin{cases} p(\uparrow, \uparrow) = p(\downarrow, \downarrow) = \frac{|\alpha - \beta|}{2\pi} \\ p(\uparrow, \downarrow) = p(\downarrow, \uparrow) = \frac{1}{2} \frac{|\alpha - \beta|}{2\pi} \end{cases} \quad (3)$$

dove  $\uparrow$  e  $\downarrow$  sono definiti rispetto al verso dei campi magnetici dei due magneti.

Tuttavia se si esegue il calcolo secondo il formalismo quantistico si ottiene:

$$\begin{cases} p(\uparrow, \uparrow) = p(\downarrow, \downarrow) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{|\alpha - \beta|}{2} \\ p(\uparrow, \downarrow) = p(\downarrow, \uparrow) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{|\alpha - \beta|}{2} \end{cases} \quad (4)$$

Quindi il modello ad hoc fa ciò che gli è richiesto (vale a dire, riproduce i risultati della meccanica quantistica) solo per  $\alpha - \beta = 0$ ,  $|\alpha - \beta| = \frac{1}{2}\pi$  e  $|\alpha - \beta| = \pi$ , ma non per tutti gli angoli intermedi.

Ovviamente questo modello banale è stato solo il primo a cui abbiamo pensato, e ha funzionato ma solo fino a un certo punto. Non potremmo essere un po' più intelligenti e ideare un modello che riproduca completamente le formule quantistiche?

No. Non può essere fatto, finché si esclude l'azione a distanza. Questo punto è stato compreso solo in seguito. Né EPR né i suoi oppositori contemporanei ne erano a conoscenza. In effetti, la discussione fu a lungo interamente concentrata sui punti:

$$\alpha - \beta = 0, |\alpha - \beta| = \frac{1}{2}\pi \text{ e } |\alpha - \beta| = \pi$$

### 3. Le difficoltà con il principio di località

Per spiegare questo epilogo senza la matematica non posso fare di meglio che seguire d'Espagnat<sup>14</sup> e<sup>15</sup>. Torniamo per un momento ai calzini. Una delle domande più importanti su un calzino è "si potrà lavare"?

Un'organizzazione di ricerca sui consumatori potrebbe rendere la domanda più precisa: il calzino potrebbe sopravvivere a mille cicli di lavaggio a 45 °C? O a 90 °C? O a 0 °C? Quindi si applica un adattamento della disuguaglianza di Wigner-d'Espagnat<sup>16</sup>.

Per qualsiasi collezione di nuovi calzini:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(il numero che potrebbe passare a } 0^\circ \text{ e non a } 45^\circ) \\ \text{più} \\ \text{(il numero che potrebbe passare a } 45^\circ \text{ e non a } 90^\circ) \\ \text{non è inferiore a} \\ \text{(il numero che potrebbe passare a } 0^\circ \text{ e non a } 90^\circ) \end{array} \right. \quad (5)$$

questo è banale, perché ogni membro del terzo gruppo:

- potrebbe sopravvivere a 45°, e così è anche nel secondo gruppo,
- non potrebbe sopravvivere a 45°, e così è anche nel primo gruppo.

Ma banalità come questa, dirai, non interessano alla ricerca sui consumatori! Hai ragione; stiamo forzando un po' l'analogia tra la ricerca sui consumatori e la filosofia quantistica. Inoltre, farai notare che l'affermazione non ha alcun contenuto empirico.

Non c'è modo di decidere che un dato calzino potrebbe sopravvivere a una temperatura e non a un'altra. Se non fosse sopravvissuto al primo test, non sarebbe disponibile per il secondo e, anche se fosse sopravvissuto al primo test, non sarebbe più nuovo e i test successivi non avrebbero il significato originale.

Supponiamo, tuttavia, che i calzini siano forniti in coppia. E supponiamo di sapere per esperienza che c'è poca variazione tra i membri di una coppia, nel senso che se un membro supera un dato test, anche l'altro supera lo stesso test se viene eseguito. Quindi dalla disuguaglianza di d'Espagnat possiamo dedurre quanto segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(il numero di coppie in cui uno potrebbe passare a } 0^\circ \text{ e l'altro no a } 45^\circ) \\ \text{più} \\ \text{(il numero di coppie in cui uno potrebbe passare a } 45^\circ \text{ e l'altro no a } 90^\circ) \\ \text{non è inferiore a} \\ \text{(il numero di coppie in cui uno potrebbe passare a } 0^\circ \text{ e l'altro no a } 90^\circ) \end{array} \right. \quad (6)$$

Questo non è ancora testabile empiricamente, perché sebbene i due test in ciascuna parentesi siano ora su calzini diversi, le diverse parentesi implicano test diversi sullo stesso calzino.

Ma ora aggiungiamo l'ipotesi del *campionamento casuale*: se il campione di coppie è sufficientemente ampio e se scegliamo a caso un sotto campione abbastanza grande da sottoporre ad una data coppia di test, allora le frazioni di superamento/fallimento del sotto campione possono essere estese all'intero campione con elevata probabilità.

<sup>14</sup> B. d'Espagnat, Scientific American, p. 158. November 1979.

<sup>15</sup> B. d'Espagnat, A la Recherche du Reel. Gauthier-Villars, Paris A979).

<sup>16</sup> 'The number of young women is less than or equal to the number of woman smokers plus the number of young non-smokers.' (Ref. 15, p. 27). See also E. P. Wigner, Am. J. Phys. 38, 1005 A970).

Identificando tali frazioni con probabilità in un modo del tutto convenzionale, ora abbiamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(la probabilità che un calzino passi a } 0^\circ \text{ e l'altro non a } 45^\circ) \\ \text{più} \\ \text{(la probabilità che un calzino passi a } 45^\circ \text{ e l'altro non a } 90^\circ) \\ \text{non è inferiore a} \\ \text{(la probabilità che un calzino passi a } 0^\circ \text{ e l'altro non a } 90^\circ) \end{array} \right. \quad (7)$$

Inoltre questo è empiricamente significativo solo nella misura in cui le probabilità possano essere determinate tramite campionamento casuale. Abbiamo formulato queste considerazioni prima per coppie di calzini, muovendoci con considerevole sicurezza in quegli oggetti familiari.

Ma perché non ragionare in modo simile per le coppie di particelle dell'esperimento EPRB? Bloccando i canali  $\downarrow$  nei magneti Stern-Gerlach, consentendo il passaggio solo alle particelle deviate  $\uparrow$ , sottoponiamo effettivamente le particelle a test che o superano o non superano.

Invece delle temperature, ora abbiamo angoli  $\alpha$  e  $\beta$  a cui sono impostati i magneti Stern-Gerlach. La differenza essenziale, banale, è che le particelle sono accoppiate alla Bertlmann: se una dovesse superare un dato test, l'altra sicuramente lo fallirebbe. Per consentire ciò, prendiamo semplicemente l'inverso del secondo termine in ogni parentesi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(la probabilità che una particella passi a } 0^\circ \text{ e l'altra a } 45^\circ) \\ \text{più} \\ \text{(la probabilità che una particella passi a } 45^\circ \text{ e l'altra a } 90^\circ) \\ \text{non è inferiore a} \\ \text{(la probabilità che una particella passi a } 0^\circ \text{ e l'altra a } 90^\circ) \end{array} \right. \quad (8)$$

Nel caso in cui qualcuno trovi la deviazione dei calzini un po' lunga, diamo un'occhiata direttamente a questo risultato finale e vediamo quanto sia banale. Stiamo assumendo che le particelle abbiano proprietà che determinano la loro capacità di superare determinati test, indipendentemente dal fatto che questi test vengano effettivamente eseguiti.

Per spiegare la perfetta anticorrelazione quando test identici (magnetii paralleli di Stern-Gerlach) vengono applicati ai due membri di una coppia, dobbiamo ammettere che l'accoppiamento è generalizzato alla Bertlmann: quando uno ha la capacità di superare un certo test, l'altro non ce l'ha.

Quindi l'affermazione di cui sopra sulle coppie è equivalente alla seguente affermazione su entrambi i membri:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(la probabilità di essere in grado di superare a } 0^\circ \text{ e non in grado a } 45^\circ) \\ \text{più} \\ \text{(la probabilità di essere in grado di superare a } 45^\circ \text{ e non in grado a } 90^\circ) \\ \text{non è inferiore a} \\ \text{(la probabilità di essere in grado di superare a } 0^\circ \text{ e non in grado a } 90^\circ) \end{array} \right. \quad (9)$$

E questo è davvero banale.

Per una particella in grado di passare a  $0^\circ$  e non a  $90^\circ$  (e quindi contribuisce alla terza probabilità in (9))

- è in grado di passare a  $45^\circ$  (e quindi contribuisce alla seconda probabilità)
- non è in grado di passare a  $45^\circ$  (e quindi contribuisce alla prima probabilità).

Tuttavia, per quanto banale, la disuguaglianza non è rispettata dalle probabilità della meccanica quantistica.

Da (4) la probabilità della meccanica quantistica per una particella di passare un magnete con orientamento  $\alpha$  e per l'altra di passare un magnete con orientamento  $\beta$  (chiamato  $P(\uparrow, \uparrow)$ ) in (4) è

$$p(\uparrow, \uparrow) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{|\alpha - \beta|}{2}$$

La disuguaglianza (9) richiederebbe quindi:

$$\frac{1}{2} \sin^2(22,5^\circ) + \frac{1}{2} \sin^2(22,5^\circ) \geq \frac{1}{2} \sin^2(45,0^\circ)$$

Ovvero:

$$0,1464 \geq 0,2500$$

il che non è vero.

Riassumiamo ancora una volta la logica che porta all'impasse. Le correlazioni EPRB sono tali che il risultato dell'esperimento su un lato predice immediatamente quello dall'altro, ogni volta che gli analizzatori sono paralleli.

Se non accettiamo che l'intervento su un lato determini un'influenza causale sull'altro, siamo obbligati ad ammettere che i risultati da entrambe le parti sono comunque determinati in anticipo, in maniera indipendente dall'intervento dell'altra parte, dai segnali provenienti dalla sorgente e dall'impostazione locale del magnete.

Ma questo ha implicazioni per le impostazioni non parallele che sono in conflitto con quelle della meccanica quantistica. Quindi non possiamo liquidare l'intervento di una parte come un'influenza causale sull'altra. Sarebbe sbagliato dire "*Bohr vince di nuovo*" (Appendice 1); l'argomento non era noto agli oppositori di Einstein, Podolsky e Rosen.

Ma certamente Einstein non poteva più scrivere così facilmente, parlando di causalità locale '*... non riesco ancora a trovare alcun fatto da nessuna parte che faccia apparire probabile che tale requisito debba essere abbandonato*'.

#### 4. Argomentazione generale

Finora la presentazione mirava alla semplicità. Ora l'obiettivo sarà la generalità<sup>17</sup>. Elenchiamo prima alcuni aspetti della presentazione che non sono essenziali e saranno evitati. L'argomentazione di cui sopra si basa molto sulla perfezione della correlazione (o meglio anticorrelazione) quando i due magneti sono allineati ( $\alpha = \beta$ ) e anche altre condizioni sono ideali.

Sebbene si possa sperare di avvicinarsi sperimentalmente a questa situazione, non si può sperare di realizzarla completamente. Qualche imperfezione residua dell'impostazione rovinerebbe la perfetta anticorrelazione, così che occasionalmente entrambe le particelle verrebbero deviate verso il basso, o entrambe verso l'alto.

Quindi nell'argomentazione più sofisticata eviteremo qualsiasi ipotesi di perfezione. Fu solo nel contesto della correlazione perfetta (o anticorrelazione) che il determinismo poteva essere dedotto per la relazione dei risultati delle osservazioni con le proprietà delle particelle preesistenti (perché qualsiasi indeterminismo avrebbe rovinato la correlazione).

Nonostante la mia insistenza sul fatto che il determinismo fosse dedotto piuttosto che assunto, potreste comunque sospettare in qualche modo che sia una preoccupazione per il determinismo a creare il problema. Osservate dunque che il seguente argomento non fa alcun accenno al determinismo. Potreste sospettare che ci sia qualcosa di peculiare nelle particelle di spin. In effetti

---

<sup>17</sup> Other discussions with some pretension to generality are: J. F. Clauser and M. A. Home, Phys. Rev. 10D A974) 526; J. S. Bell, CERN preprint TH-2053 A975), reproduced in Epistemological Letters (Association Ferd. Gonseth, CP 1081, CH- 2051, Bienne) 9 A976) 11; H. P. Stapp, Foundations of Physics 9 A979) 1. Many other references are given in the reviews of Clauser and Shimony, and Pipkin in Ref. 19.

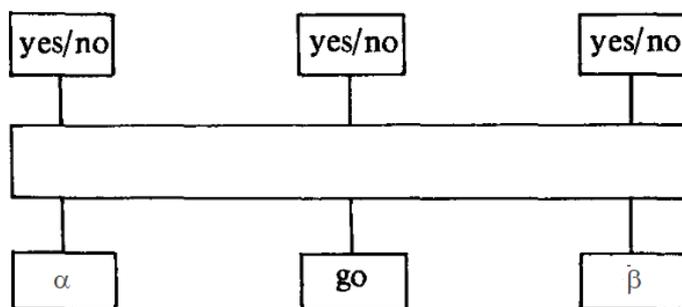
ci sono molti altri modi per creare le *fastidiose correlazioni*. Quindi il seguente argomento non fa alcun riferimento alle particelle di spin o ad altre particelle particolari.

Infine, potresti sospettare che la nozione stessa di particella e di orbita delle particelle, liberamente usata sopra nell'introdurre il problema, ci abbia in qualche modo fuorviato. In effetti, Einstein non pensava che i campi piuttosto che le particelle fossero alla base di tutto?

Quindi il seguente argomento non menzionerà particelle, né campi, né nessun'altra immagine particolare di ciò che accade a livello microscopico. Né implicherà alcun uso delle parole sistema meccanico-quantistico, che può avere un effetto fuorviante sulla discussione.

La difficoltà non è creata da nessuna di queste immagini o da nessuna di queste terminologie. È creata dalle previsioni sulle correlazioni negli output visibili di certi possibili set-up sperimentali.

Considera il set-up sperimentale generale della figura.



Per evitare dettagli inessenziali, è rappresentato solo come una lunga scatola di apparecchiature non specificate, con tre ingressi e tre uscite. Gli output, sopra nella figura, possono essere tre fogli di carta, ognuno con stampato sopra 'sì' o 'no'.

L'input centrale è solo un segnale 'go' che fa partire l'esperimento all'istante

$t_1$ . Poco dopo, l'output centrale dice 'sì' o 'no'. Siamo interessati solo ai 'sì', che confermano che tutto è partito bene (ad esempio, non ci sono particelle che vanno nella direzione sbagliata e così via).

All'istante  $t_1 + T$  appaiono gli altri output, ognuno con 'sì' o 'no' (a seconda, ad esempio, se è apparso o meno un segnale sul lato  $\uparrow$  di uno schermo di rilevamento dietro un magnete Stern-Gerlach). L'apparato quindi si riposa e si riprende internamente in preparazione per una successiva ripetizione dell'esperimento. Ma appena prima dell'istante  $t_1 + T$ , diciamo al tempo  $t_1 + T - \delta$ , i segnali  $\alpha$  e  $\beta$  vengono iniettati alle due estremità. (Potrebbero ad esempio imporre che i magneti Stern-Gerlach vengano ruotati di angoli  $\alpha$  e  $\beta$  rispetto a una posizione standard).

Possiamo disporre che  $c\delta \ll L$ , dove  $c$  è la velocità della luce e  $L$  la lunghezza della scatola; non ci aspetteremmo quindi che il segnale a un'estremità abbia alcuna influenza sull'output all'altra, per mancanza di tempo, qualunque connessione nascosta possa esserci tra le due estremità.

Un numero sufficientemente elevato di ripetizioni dell'esperimento consentirà di testare ipotesi sulla distribuzione di probabilità condizionata congiunta  $P(A,B|\alpha,\beta)$  per i risultati A e B alle due estremità per i segnali dati  $\alpha$  e  $\beta$ .

Ora, naturalmente, non sarebbe una sorpresa scoprire che i due risultati A e B sono correlati, cioè che P non si divide in un prodotto di fattori indipendenti:

$$P(A,B|\alpha,\beta) \neq P_1(A|\alpha) P_2(B|\beta)$$

Ma sosteneremo che certe correlazioni particolari, realizzabili secondo le previsioni della meccanica quantistica, sono localmente inspiegabili. Vale a dire che non possono essere spiegate senza azione a distanza.

Per *spiegare l'inspiegabile spieghiamo lo spiegabile*. Ad esempio, le statistiche degli attacchi cardiaci a Lille e Lione mostrano forti correlazioni. La probabilità di M casi a Lione e N a Lille, in un giorno scelto a caso, non si fattorizza:

$$P(M,N) \neq P_1(M) P_2(N)$$

In effetti, quando M è sopra la media, anche N tende a essere sopra la media. Potresti scrollare le spalle e dire "*le coincidenze capitano sempre*", o "*così è la vita*".

Un simile atteggiamento nel contesto della filosofia quantistica, a volte, è effettivamente sostenuto da persone altrimenti serie.

Ma al di fuori di quel contesto peculiare, un simile atteggiamento verrebbe liquidato come non scientifico. L'atteggiamento scientifico è che le correlazioni chiedono a gran voce una spiegazione. E naturalmente nell'esempio dato si trovano presto spiegazioni.

Il clima è più o meno lo stesso nelle due città, e le giornate calde sono pessime per gli infarti. Il giorno della settimana è esattamente lo stesso nelle due città, e la domenica è particolarmente pessima a causa dei litigi in famiglia e del troppo da mangiare. E così via.

Sembra ragionevole aspettarsi che se un numero sufficiente di tali fattori causali può essere identificato e mantenuto fisso, le fluttuazioni residue saranno indipendenti, vale a dire

$$P(M,N|\alpha,\beta,\lambda) \neq P_1(M|\alpha,\lambda) P_2(N|\beta,\lambda) \quad (10)$$

dove  $\alpha, \beta$ , sono le temperature rispettivamente a Lione e Lille mentre  $\lambda$  denota qualsiasi numero di altre variabili che potrebbero essere rilevanti e  $P(M,N|\alpha,\beta,\lambda)$  è la probabilità condizionata di M casi a Lione e N a Lille per un dato  $(\alpha,\beta,\lambda)$ . Si noti bene che abbiamo già incorporato nella (10) un'ipotesi di *causalità locale* o *nessuna azione a distanza*. Infatti non è consentito al primo fattore di dipendere da  $\beta$ , né al secondo da  $\alpha$ . Cioè, non ammettiamo che la temperatura a Lione abbia un'influenza causale a Lille, e viceversa.

Supponiamo dunque che le correlazioni tra A e B nell'esperimento EPR siano in qualche modo *spiegabili localmente*. Cioè supponiamo che ci siano variabili  $\lambda$ , che, se solo le conoscessimo, consentirebbero il disaccoppiamento delle fluttuazioni:

$$P(A,B|\alpha,\beta,\lambda) = P_1\{A|\alpha,\lambda\} P_2\{B|\beta,\lambda\} \quad (11)$$

Dobbiamo quindi considerare una distribuzione di probabilità  $f(\lambda)$  su queste variabili complementari, ed è sulla probabilità media che possiamo fare previsioni di meccanica quantistica.

$$P(A,B|\alpha,\beta) = \int f(\lambda) P(A,B|\alpha,\beta,\lambda) d(\lambda) \quad (12)$$

Ma non tutte le funzioni  $P(A,B|\alpha,\beta)$  possono essere rappresentate nella forma della equazione (12). Per vederlo è utile introdurre la combinazione (funzione di correlazione):

$$E(\alpha,\beta) = P(\uparrow\uparrow|\alpha,\beta) + P(\downarrow\downarrow|\alpha,\beta) - P(\uparrow\downarrow|\alpha,\beta) - P(\downarrow\uparrow|\alpha,\beta) \quad (13)$$

Allora è facile dimostrare (vedi Appendice 2) che se la (12) vale per qualsiasi numero di variabili  $\lambda$  e per qualsiasi distribuzione di probabilità  $\rho(\lambda)$  allora segue la disuguaglianza di Clauser-Holt-Horne-Shimony<sup>18</sup>

$$|E(\alpha,\beta) + E(\alpha,\beta') + E(\alpha',\beta) - E(\alpha',\beta')| \leq 2 \quad (14)$$

Secondo la meccanica quantistica, tuttavia, per esempio esempio con qualche approssimazione pratica all'impostazione dell'esperimento mentale EPRB, possiamo avere approssimativamente (dalla (4):

$$E(\alpha,\beta) = \sin^2 \frac{|\alpha - \beta|}{2} - \cos^2 \frac{|\alpha - \beta|}{2} = -\cos(\alpha - \beta) \quad (15)$$

Prendendo ad esempio:

$$\alpha = 0^\circ, \alpha' = 90^\circ, \beta = 45^\circ, \beta' = -45^\circ \quad (16)$$

<sup>18</sup> J.F. Clauser, R.A. Holt, M.A. Korne and A. Shimony, Phys. Rev. Letters 23 (1969) 880,

Ed applicando la (15) ai diversi contesti sperimentali:

$$|E(\alpha, \beta) + E(\alpha, \beta') + E(\alpha', \beta) - E(\alpha', \beta')| = |-3\cos 45^\circ + \cos 135^\circ| = 2\sqrt{2} \quad (17)$$

In contraddizione con la (14). Si osservi che con una tale contraddizione non è necessario realizzare la (15) in modo accurato. Basta ottenere una approssimazione abbastanza vicina visto che tra la (14) e la (17) c'è di mezzo un fattore pari a  $\sqrt{2}$ .

Quindi le correlazioni quantistiche rispetto alla località sono inspiegabili. Per evitare la disuguaglianza potremmo consentire a  $P_1$  nella (11) di dipendere da  $\beta$  o a  $P_2$  di dipendere da  $\alpha$ . Ciò significa che potremmo ammettere che l'input a un estremo sia in grado di influenzare ciò che avviene all'altro estremo.

Per l'impostazione descritta questa non sarebbe solo una misteriosa influenza a lungo raggio - una *non-località* o *azione a distanza* in senso lato - ma addirittura una che si propaga più velocemente della luce (perché  $c\delta \ll L$ ) - una *non-località* nel senso più stretto e indigeribile.

È degno di nota che in questa argomentazione non si dice nulla sul carattere locale o sulla localizzabilità della variabile  $\lambda$ .

Queste variabili potrebbero ben includere, ad esempio, i vettori di stato della meccanica quantistica, che non hanno una localizzazione particolare nello spazio-tempo ordinario. Si presume solo che le uscite A e B e gli input particolari  $\alpha$  e  $\beta$  siano ben localizzati.

## 5. Per concludere

Per concludere, commenterò quattro possibili posizioni che potrebbero essere assunte su questa questione, senza pretendere che siano le uniche possibilità.

In primo luogo, e quelli di noi che sono ispirati da Einstein lo apprezzeranno di più, la meccanica quantistica potrebbe essere sbagliata in situazioni critiche. Forse la natura non è così strana come la meccanica quantistica pretende che sia.

Ma la situazione sperimentale non è molto incoraggiante da questo punto di vista<sup>19</sup>. È vero che gli esperimenti pratici sono ben lontani dall'ideale, a causa di inefficienze nei contatori e negli analizzatori, o per imperfezioni nella geometria del sistema geometriche, e così via. È solo con ipotesi aggiuntive, o con una tolleranza convenzionalmente usata per le inefficienze e per l'estrapolazione dal reale all'ideale, che si può dire che la disuguaglianza sia violata.

Sebbene ci sia una via di fuga, è difficile per me credere che la meccanica quantistica funzioni così bene per configurazioni sperimentali inefficienti e che fallisca malamente quando vengono apportati raffinamenti sperimentali.

Di maggiore importanza, a mio parere, è la completa assenza del fattore tempo di volo negli esperimenti esistenti. Gli analizzatori non vengono ruotati durante il volo delle particelle. Anche se si è obbligati ad ammettere una influenza a lungo raggio, non è necessario che il fenomeno viaggi più veloce della luce, e quindi sarebbe molto meno indigesto da accettare.

Per me, quindi, è di fondamentale importanza che Aspect,<sup>20</sup> sia impegnato in un esperimento in cui viene introdotto il fattore tempo.

In secondo luogo, potrebbe non essere consentito considerare le impostazioni sperimentali  $\alpha$  e  $\beta$  negli analizzatori come variabili indipendenti, come abbiamo fatto<sup>21</sup>. In particolare abbiamo

---

<sup>19</sup> The experimental situation is surveyed in the accompanying paper of A. Aspect. See also : J.F. Clauser and A. Shimony, Reports on Progress in Physics 41 (1978) 1881 ,• F.M. Pipkin, Annual Reviews of Nuclear Science, (1978).

<sup>20</sup> A, Aspect, Phys. Rev. 14D (1976) - 1944

supposto che fossero indipendenti dalle variabili supplementari  $\lambda$ , in quanto  $\alpha$  e  $\beta$  potevano essere modificate senza modificare la distribuzione di probabilità  $\rho(\lambda)$ . Ora, anche se abbiamo disposto che  $\alpha$  e  $\beta$  siano generati da dispositivi radioattivi apparentemente casuali, alloggiati in scatole separate e densamente schermati, o da macchine della lotteria nazionale svizzera, o da elaborati programmi per computer, o da fisici sperimentali apparentemente liberi, o da una combinazione di tutti questi, non possiamo essere sicuri che  $\alpha$  e  $\beta$  non siano influenzati in modo significativo dagli stessi fattori  $\lambda$  che influenzano A e B.

Ma questo modo di organizzare le correlazioni meccanico-quantistiche sarebbe ancora più sconcertante di uno in cui le catene causali vanno più veloci della luce. Parti apparentemente separate del mondo sarebbero profondamente e in modo cospiratorio aggrovigliate, e il nostro apparente libero arbitrio sarebbe impigliato con esse.

In terzo luogo, potremmo dover ammettere che le influenze causali vanno più veloci della luce. Il ruolo dell'invarianza di Lorentz nella teoria completata sarebbe quindi molto problematico. L'*etere* sarebbe la soluzione più economica.<sup>22</sup> Ma la non osservabilità di questo etere sarebbe inquietante. Così come lo sarebbe l'impossibilità di inviare *messaggi più veloci della luce*, che deriva dalla ordinaria meccanica quantistica relativistica che risulta esente da equivoci e adeguata per le procedure che possiamo effettivamente eseguire. L'esatta spiegazione di concetti come *messaggio e noi* sarebbe una sfida formidabile.

In quarto luogo, per finire, potrebbe essere che l'intuizione di Bohr fosse giusta, nel senso che non esiste realtà al di sotto di un livello *classico e macroscopico*. Quindi la teoria fisica fondamentale rimarrebbe fondamentalmente vaga, finché concetti come *macroscopico* non potessero essere resi più nitidi di quanto non lo siano oggi.

## Appendice 1 - La posizione di Bohr

Mentre penso di comprendere la posizione di Einstein<sup>23 24</sup>, sulle correlazioni EPR, ho una comprensione molto scarsa della posizione del suo principale avversario, Bohr. Eppure la maggior parte dei teorici contemporanei ha l'impressione che Bohr abbia avuto la meglio su Einstein nella discussione e credono di condividere le idee di Bohr.

Come indicazione di queste idee cito un passaggio<sup>25</sup> dalla sua risposta a Einstein, Podolsky e Rosen. È un passaggio che Bohr stesso sembra aver considerato definitivo, citandosi quando ha riassunto le sue posizioni molto più tardi<sup>26</sup>.

Einstein, Podolsky e Rosen avevano ipotizzato che "... se, senza in alcun modo disturbare un sistema, possiamo predire con certezza il valore di una quantità fisica, allora esiste un elemento di realtà fisica corrispondente a questa quantità fisica". Bohr rispose: "...la formulazione del criterio sopra menzionato... contiene un'ambiguità per quanto riguarda il significato dell'espressione "senza in alcun modo disturbare un sistema". Naturalmente, in un caso come quello appena considerato non si pone la questione di una perturbazione meccanica del sistema in esame durante l'ultima fase

---

<sup>21</sup> For some explicit discussion of this, see contributions of Shimony, Home, Clauser and Bell in *Epistemological Letters* (Association Ferdinand Gonseth, CP 1081, CH- 2051, Bienne) 13, p. 1 A976); 15, p. 79, A977) and 18, p. 1978). See also Clauser and Shimony in Ref. 19.

<sup>22</sup> P.H. Eberhard, *Nuovo Cimento* 46B (1978) 392.

<sup>23</sup> But Max Jammer thinks that I misrepresent Einstein (Ref. 5 , p. 254). I have defended my views in Ref. 24

<sup>24</sup> J.S. Bell, in *Frontier Problems in High Energy Physics*, in honour of Gilberto Bernardini, Scuola Normale, Pisa, 1976.

<sup>25</sup> N. Bohr, *Phys. Rev.* 48 (1935) 696.

<sup>26</sup> N. Bohr, In *Albert Einstein, Philosopher-Scientist* (P.A. Schlipp, Ed., Tudor, N.Y., 1949).

critica della procedura di misurazione. *Ma anche in questa fase si pone essenzialmente la questione di un'influenza sulle condizioni stesse che definiscono i possibili tipi di previsioni riguardo al comportamento futuro del sistema...* la loro argomentazione non giustifica la loro conclusione che la descrizione meccanica quantistica sia essenzialmente incompleta... Questa descrizione può essere caratterizzata come un'utilizzazione razionale di tutte le possibilità di interpretazione univoca delle misurazioni, compatibile con l'interazione finita e incontrollabile tra gli oggetti e gli strumenti di misurazione nel campo della teoria quantistica".

In effetti, ho ben poca idea di cosa significhi. Non capisco in che senso venga usata la parola *meccanico* per caratterizzare i disturbi che Bohr non contempla, in quanto distinti da quelli che contempla. Non so cosa significhi il passaggio in corsivo: "un'influenza sulle condizioni stesse..." Potrebbe significare semplicemente che diversi esperimenti sul primo sistema forniscono diversi tipi di informazioni sul secondo? Ma questo era solo uno dei punti principali di EPR, che osservava che si poteva apprendere sia la posizione che la quantità di moto del secondo sistema. E poi non capisco il riferimento finale a "interazioni incontrollabili tra strumenti di misura e oggetti", sembra semplicemente ignorare il punto essenziale di EPR secondo cui, in assenza di azione a distanza, solo il primo sistema potrebbe essere supposto disturbato dalla prima misurazione e tuttavia diventano possibili previsioni definite per il secondo sistema. Bohr sta semplicemente rifiutando la premessa - "nessuna azione a distanza" - piuttosto che confutare l'argomento?

## Appendice 2 - Disuguaglianza di Clauser-Holt-Horne-Shimony

Dalla (13) e la (11)

$$E(\alpha, \beta) = \int d\lambda f(\lambda) \{P_1(\text{yes}|\alpha, \lambda) - P_1(\text{no}|\alpha, \lambda)\} \{P_2(\text{yes}|\beta, \lambda) - P_2(\text{no}|\beta, \lambda)\} = \\ = \int d\lambda f(\lambda) \overline{A}(\alpha, \lambda) \overline{B}(\beta, \lambda) \quad (18)$$

dove  $\overline{A}(\alpha, \lambda)$  e  $\overline{B}(\beta, \lambda)$  rappresentano i due termini tra parentesi graffe. Si osservi che poiché le P rappresentano delle probabilità si ha che:

$$0 \leq P_1 \leq 1 \text{ e } 0 \leq P_2 \leq 1$$

Ne consegue che:

$$|\overline{A}(\alpha, \lambda)| \leq 1 \text{ e } |\overline{B}(\beta, \lambda)| \leq 1 \quad (19)$$

dalla (18)

$$E(\alpha, \beta) \pm E(\alpha, \beta') \leq \int d\lambda f(\lambda) \overline{A}(\alpha, \lambda) [\overline{B}(\beta, \lambda) \pm \overline{B}(\beta', \lambda)]$$

e dalla (19)

$$|E(\alpha, \beta) \pm E(\alpha, \beta')| \leq \int d\lambda f(\lambda) \overline{A}(\alpha, \lambda) |\overline{B}(\beta, \lambda) \pm \overline{B}(\beta', \lambda)|$$

Ed equivalentemente

$$|E(\alpha', \beta) \mp E(\alpha', \beta')| \leq \int d\lambda f(\lambda) \overline{A}(\alpha, \lambda) |\overline{B}(\beta, \lambda) \mp \overline{B}(\beta', \lambda)|$$

usando nuovamente la (19)

$$|\overline{B}(\beta, \lambda) + \overline{B}(\beta', \lambda)| + |\overline{B}(\beta, \lambda) \mp \overline{B}(\beta', \lambda)| \leq 2$$

e, tenuto conto che,

$$\int d\lambda f(\lambda) = 1$$

segue che,

$$|E(\alpha, \beta) \pm E(\alpha, \beta')| + |E(\alpha, \beta') \mp E(\alpha', \beta')| \leq 2$$

che comprende la (14)